

**CHƯƠNG 3**  
**HỆ PHƯƠNG TRÌNH**  
**TUYẾN TÍNH**

# I. ĐẶT BÀI TOÁN :

Hệ phương trình tuyến tính  $n$  pt và  $n$  ẩn có dạng

$$Ax = b$$

với

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

## Các phương pháp giải

### ➤ Phương pháp giải chính xác

- Phương pháp Gauss
- Phương pháp Gauss-Jordan
- Phương pháp nhân tử LU
- Phương pháp Cholesky

### ➤ Phương pháp giải gần đúng

- Phương pháp lặp Jacobi
- Phương pháp lặp Gauss-Seidel

## II. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

### 1. Các dạng ma trận đặc biệt :

#### a. Ma trận chéo :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i$$

$$\text{Nghịệm } x_i = b_i / a_{ii}$$

## b. Ma trận tam giác dưới

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i$$

Phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left[ b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} x_j \right], k = 2, n \end{cases}$$

### c. Ma trận tam giác trên :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ii} \neq 0, \forall i$$

Phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left[ b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} x_j \right], k = n-1, 1 \end{cases}$$

## 2. Phương pháp Gauss :

Ta sử dụng các phép biến đổi sơ cấp theo dòng để chuyển ma trận  $A$  về ma trận tam giác trên

Các phép biến đổi sơ cấp theo dòng

- hoán chuyển 2 dòng
- nhân 1 dòng với 1 số khác 0
- cộng 1 dòng với dòng khác

## Ví dụ : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

**Giải**

$$\begin{aligned} [A/b] &= \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{h_2=h_2-2h_1 \\ h_3=h_3-h_1 \\ h_4=h_4-h_1}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{h_2 \leftrightarrow h_3 \\ h_4=h_4/2}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{h_4=h_4+h_3} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Giải pt ma trận tam giác trên, ta được nghiệm

$$\mathbf{x} = (-7, 3, 2, 2)^t$$



### III. PHƯƠNG PHÁP NHÂN TỬ LU

Phân tích ma trận  $A$  thành tích 2 ma trận  $L$  và  $U$

$$A = LU$$

$L$  : ma trận tam giác dưới

$U$  : ma trận tam giác trên

Phương trình  $Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b$

Ta đưa về giải 2 hệ phương trình

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

## Phương pháp Doolittle :

Giả sử A ma trận không suy biến và  $a_{11} \neq 0$

Ta có thể phân tích A thành

$$A = LU$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ma trận  $\Delta$  dưới

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận  $\Delta$  trên

Các phần tử của L và U được xác định theo công thức

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{1j} = a_{1j}, \quad 1 \leq j \leq n \\ l_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}}, \quad 2 \leq i \leq n \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad 1 < i \leq j \\ l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left[ a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right], \quad 1 < j < i \end{array} \right.$$

## Ví dụ : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ -4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

**Giải**

Ta phân tích

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = -2$$

$$l_{32} = \frac{1}{u_{22}}(a_{32} - l_{31}u_{12}) = -1$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3$$

Giải hệ  $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Giải hệ  $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nghiệm  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$

TH đặc biệt : A ma trận 3 đường chéo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{m-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ta phân tích A thành LU với

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Các phần tử của L và U được xác định theo công thức

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{11} = a_{11}, u_{12} = a_{12}, l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ u_{ii} = a_{ii} - l_{ii-1}u_{i-1i}, \quad i = 2, n \\ u_{ii+1} = a_{ii+1}, \quad i = 2, n-1 \\ l_{i+1i} = \frac{a_{i+1i}}{u_{ii}}, \quad i = 2, n-1 \end{array} \right.$$

**Ví dụ :** Giải hệ phương trình  $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Giải**

Ta phân tích

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3/2$$

$$u_{23} = a_{23} = -1, \quad l_{32} = \frac{a_{32}}{u_{22}} = -2/3$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{32}u_{23} = 4/3$$



Giải hệ  $Ly = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

Giải hệ  $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10/3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Nghiệm  $x_1 = 5/2$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 5/2$

# III. PHƯƠNG PHÁP CHOLESKY

## Định nghĩa :

➤ Ma trận  $A$  gọi là đối xứng nếu

$$A = A^t$$

➤ Ma trận  $A$  gọi là xác định dương nếu

$$x^t Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in R^n, x \neq 0$$

Để kiểm tra xác định dương, ta dùng định lý sau:

**Định lý :**

Ma trận A là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của nó đều dương

**Ví dụ :** Kiểm tra tính xác định dương của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**Giải**

Các định thức con chính:  $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vậy A là xác định dương

## **Định lý (Cholesky) :**

Nếu A ma trận đối xứng và xác định dương, thì tồn tại ma trận  $\Delta$  dưới, khả đảo B sao cho

$$A = BB^t$$

Ma trận  $B = (b_{ij})$  tìm theo công thức sau :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ b_{i1} = \frac{a_{i1}}{b_{11}}, 2 \leq i \leq n \\ b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}, 2 \leq i \leq n \\ b_{ij} = \frac{1}{b_{jj}} [a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} b_{jk}], 2 \leq j \leq i \end{array} \right.$$

**Ví dụ :** Giải hệ phương trình  $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Giải**

Ta có  $A$  ma trận đối xứng và xác định dương  
Phân tích  $A = BB^t$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b_{22} & 0 \\ -1 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Các hệ số} \\ \left\{ \begin{array}{l} b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2} = 1 \\ b_{32} = \frac{1}{b_{22}} [a_{32} - b_{31}b_{21}] = 1 \\ b_{33} = \sqrt{a_{33} - b_{31}^2 - b_{32}^2} = \sqrt{2} \end{array} \right. \end{array}$$

Giải hệ  $By = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Giải hệ  $B^t x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Nghiệm  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -1/2$ ,  $x_3 = 3/2$

# IV. PHƯƠNG PHÁP LẶP

## 1. Chuẩn :

### a. Chuẩn vector :

#### Định nghĩa :

Chuẩn của vector  $x \in \mathbb{R}^n$  là hàm số thực ký hiệu là  $\|x\|$ , thỏa 3 điều kiện sau :

(i)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  và  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x=0$

(ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(iii)  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Có nhiều công thức chuẩn khác nhau, xét 2 công thức

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$$

$$\| \mathbf{x} \|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |x_i| \}$$

$$\| \mathbf{x} \|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Dễ dàng kiểm tra  $\| \mathbf{x} \|_{\infty}$ ,  $\| \mathbf{x} \|_1$  là các chuẩn gọi là chuẩn  $\infty$  và chuẩn 1



## b. Chuẩn ma trận :

### Định nghĩa :

Chuẩn của ma trận  $A$  được xác định theo công thức

$$\| A \| = \max_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \max_{\|x\|=1} \| Ax \|$$

**Định lý :** Cho ma trận  $A = (a_{ij})$ , ta có

$$\| A \|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n | a_{ij} | \right\}$$

$$\| A \|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n | a_{ij} | \right\}$$

### c. Hội tụ theo chuẩn :

#### **Định nghĩa :**

Dãy các vector  $\{x^{(m)}\} \in \mathbb{R}^n$  hội tụ về  $x$  theo chuẩn nếu  $\|x^{(m)} - x\| \rightarrow 0$  khi  $m \rightarrow \infty$

#### **Định lý :**

Dãy  $\{x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})\} \in \mathbb{R}^n$  hội tụ về  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  theo chuẩn nếu và chỉ nếu dãy  $\{x_k^{(m)}\}$  hội tụ về  $x_k$  khi  $m \rightarrow \infty$ ,  $\forall k=1, n$

## 2. Phương pháp lặp :

Ta chuyển hệ pt về dạng

$$x = Tx + c$$

Với  $T$  là ma trận vuông cấp  $n$  và  $c$  là 1 vector

Để tìm nghiệm gần đúng, với vector ban đầu  $x^{(0)}$ , ta xây dựng dãy lặp theo công thức

$$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c, \forall m=1,2,\dots$$

Ta cần khảo sát sự hội tụ của dãy  $\{x^{(m)}\}$

Ta có định lý sau

**Định lý :**

Nếu  $\|T\| < 1$  thì dãy lặp  $x^{(m)}$  sẽ hội tụ về nghiệm  $x$  của hệ pt, với mọi vector ban đầu  $x^{(0)}$ .

Ta có công thức đánh giá sai số :

$$(1) \quad \|x^{(m)} - x\| \leq \frac{\|T\|^m}{1 - \|T\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad \text{tiền nghiệm}$$

hoặc

$$(2) \quad \|x^{(m)} - x\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| \quad \text{hậu nghiệm}$$

# V. PHƯƠNG PHÁP LẬP JACOBI

Ta phân tích

$$A = D - L - U$$

trong đó

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{ma trận chéo}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ma trận } \Delta \text{ dưới}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ma trận } \Delta \text{ trên}$$

Phương trình  $Ax = b$

$$\Leftrightarrow (D-L-U)x = b$$

$$\Leftrightarrow Dx = (L+U)x + b$$

$$\Leftrightarrow x = D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow x = Tx + c$$

với  $T = D^{-1}(L+U)$  và  $c = D^{-1}b$

pp lặp theo phân tích trên gọi là pp lặp Jacobi

Bây giờ ta tìm điều kiện để pp lặp Jacobi HT

## **Định nghĩa :**

Ma trận A gọi là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt nếu nó thỏa điều kiện sau :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i = 1, n$$

## **Nhận xét :**

Nếu A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt thì

$$\det A \neq 0 \text{ và } a_{ii} \neq 0 \quad \forall i=1, n$$

## Định lý :

Nếu  $A$  là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt, thì pp lặp Jacobi hội tụ với mọi giá trị ban đầu  $x^{(0)}$

Ta có công thức lặp Jacobi

$$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c, \quad \forall m=1,2,\dots$$

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m-1)} + b_i \right], \quad \forall i = 1, n$$



## CM

Ta có  $x^{(m)} = TX^{(m-1)} + c$ ,  $T = D^{-1}(L+U)$  và  $c = D^{-1}b$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/a_{nn} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

A ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt nên

$$\|T\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right\} < 1$$

$\Rightarrow$  pp lặp hội tụ

**Ví dụ :** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 10x_3 = 9 \end{cases}$$

- a. Tìm nghiệm gần đúng  $x^{(5)}$  với vector ban đầu  $x^{(0)} = 0$
- b. Tính ma trận T và c
- c. Tính sai số của nghiệm  $x^{(5)}$

a.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt}$$

## Công thức lặp Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = \frac{1}{10} (-x_2^{(m-1)} + x_3^{(m-1)} + 7) \\ x_2^{(m)} = \frac{1}{10} (-x_1^{(m-1)} - x_3^{(m-1)} + 8) \\ x_3^{(m)} = \frac{1}{10} (x_1^{(m-1)} - x_2^{(m-1)} + 9) \end{cases}$$

m	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(m)}$	0					
$x_2^{(m)}$	0					
$x_3^{(m)}$	0					

b. Ta có

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0.1 \\ -0.1 & 0 & -0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

c. Công thức sai số

$$\|x^{(5)} - x\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \|x^{(5)} - x^{(4)}\|$$

Ta có  $\|T\|_{\infty} = 0.2$ , nên

$$\|x^{(5)} - x\| \leq \frac{0.2}{0.8} 4.9 * 10^{-4} = 0.1225 * 10^{-3}$$

## VI. Phương pháp lặp Gauss-Seidel :

Ta phân tích

$$A = D - L - U$$

như trong phần trước

Phương trình  $Ax = b$

$$\Leftrightarrow (D-L-U)x = b$$

$$\Leftrightarrow (D-L)x = Ux + b$$

$$\Leftrightarrow x = (D-L)^{-1}Ux + (D-L)^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow x = Tx + c$$

với  $T = (D-L)^{-1}U$  và  $c = (D-L)^{-1}b$

pp lặp theo phân tích này gọi là pp lặp Gauss-Seidel

## Định lý :

Nếu  $A$  là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt, thì pp lặp Gauss-Seidel hội tụ với mọi giá trị ban đầu  $x^{(0)}$

Ta có công thức lặp Gauss-Seidel

$$x^{(m)} = Tx^{(m-1)} + c, \quad \forall m=1,2,\dots$$

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[ -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m-1)} + b_i \right], \quad \forall i = 1, n$$

**Ví dụ :** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 20x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + 20x_2 - x_3 = 13 \\ -2x_1 - x_2 + 20x_3 = 14 \end{cases}$$

- a. Tìm nghiệm gần đúng  $x^{(4)}$  với vector ban đầu  $x^{(0)} = 0$
- b. Tính ma trận T và c
- c. Tính sai số của nghiệm  $x^{(4)}$

a.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -1 & 2 \\ 1 & 20 & -1 \\ -2 & -1 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt}$$

## Công thức lặp Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(m)} = \frac{1}{20} ( \quad + x_2^{(m-1)} - 2x_3^{(m-1)} + 12) \\ x_2^{(m)} = \frac{1}{20} (-x_1^{(m)} \quad + x_3^{(m-1)} + 13) \\ x_3^{(m)} = \frac{1}{20} (2x_1^{(m)} + x_2^{(m)} \quad + 14) \end{cases}$$

m	0	1	2	3	4
$x_1^{(m)}$	0				
$x_2^{(m)}$	0				
$x_3^{(m)}$	0				



## b. Ta có

$$D - L = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 1 & 20 & 0 \\ -2 & -1 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow (D - L)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ -0.0025 & 0.05 & 0 \\ 0.004875 & 0.0025 & 0.05 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T = (D - L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 & -0.1 \\ 0 & -0.0025 & 0.055 \\ 0 & 0.004875 & -0.00725 \end{pmatrix}$$

$$c = (D - L)^{-1}b = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.62 \\ 0.791 \end{pmatrix}$$

### c. Công thức sai số

$$\|x^{(4)} - x\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|} \|x^{(4)} - x^{(3)}\|$$

Ta có  $\|T\|_{\infty} = 0.15$ , nên

$$\|x^{(4)} - x\| \leq \frac{0.15}{0.85} 3.5123 * 10^{-5} = 0.6199 * 10^{-5}$$

## VII. Hệ pt ổn định và số điều kiện :

### 1. Hệ pt ổn định :

Xét hệ phương trình  $Ax = b$

### **Định nghĩa :**

Hệ phương trình gọi là ổn định nếu mọi thay đổi nhỏ của  $A$  hay  $b$  thì nghiệm của hệ chỉ thay đổi nhỏ

**Ví dụ :** Xét hệ phương trình  $Ax = b$  với

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.01 \end{pmatrix}$$

Hệ phương trình có nghiệm  $x = (1, 1)^T$

Thay đổi

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3.1 \end{pmatrix}$$

Nghiệm của hệ :  $x = (-17, 10)^T$

Ta thấy nghiệm của hệ khác rất xa khi  $b$  thay đổi nhỏ. Vậy hệ không ổn định

**Ví dụ :** Xét hệ phương trình  $Ax = b$  với

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Hệ có nghiệm  $x = (1, 1, 1, 1)^T$

Thay đổi A một ít

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.98 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix}$$

Nghiệm của hệ :  $x = (-81, 137, -34, 22)^T$

Ta thấy nghiệm của hệ khác rất xa khi A thay đổi nhỏ. Vậy hệ không ổn định

## 2. Số điều kiện :

Ta tìm điều kiện để hệ ổn định

**Định nghĩa :** Số

$$k(A) = \|A\| \|A\|^{-1}$$

Gọi là số điều kiện của ma trận  $A$

Ta có các tính chất :

$$(i) \quad 1 \leq k(A)$$

$$(ii) \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$(iii) \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq k(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}$$

## Nhận xét :

Số điều kiện của ma trận đặc trưng cho tính ổn định của hệ phương trình

- $k(A)$  càng gần 1 thì hệ càng ổn định
- $k(A)$  càng xa 1 thì hệ càng không ổn định

**Ví dụ :** 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{pmatrix}$$

Ta có 
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 201 & -200 \\ -100 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k(A) = 3.01 \times 401 = 1207.01 \gg 1$$

Vậy hệ không ổn định

**Ví dụ :**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta có

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/13 & -5/13 & 3/13 \\ -5/13 & 11/13 & -4/13 \\ 3/13 & -4/13 & 5/13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow k(A) = 6 \times 20/13 = 9.2308 \gg 1$$

Vậy hệ không ổn định