CHƯƠNG 2
GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH PHI TUYẾN

I. ĐẶT BÀI TOÁN :

Bài toán : tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = 0$$

với f(x) là hàm liên tục trên khoảng đóng [a, b] hay khoảng mở (a,b).

1. Khoảng cách ly nghiệm

Khoảng đóng hay mở trên đó tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình gọi là khoảng cách ly nghiệm

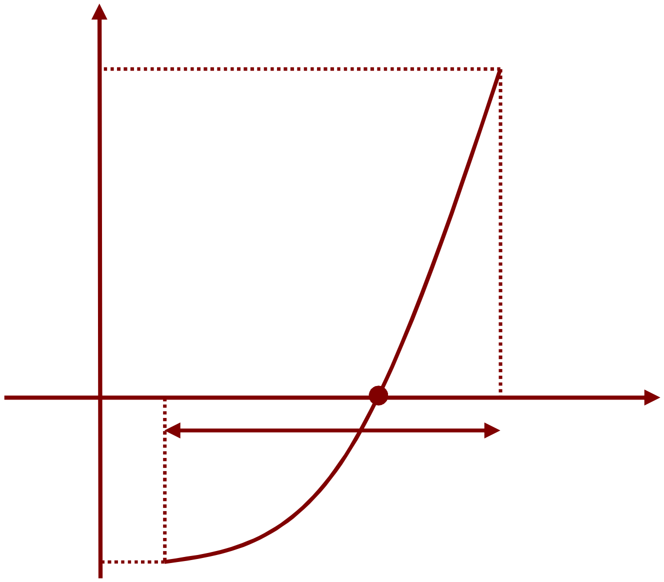
Định lý :

Nếu hàm f liên tục trên đoạn [a,b] thoả điều kiện $f(a)\ f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên [a,b].

Nếu hàm f đơn điệu thì nghiệm là duy nhất.

ĐK đủ: [a, b] là KCLN của pt khi

- **f(a) f(b) < 0**
- **Đạo hàm f' không đổi dấu trên đoạn [a,b]**



Ví dụ :

Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = x^5 + x - 12 = 0$$

Giải :

Ta có $f(1) = -10,\ f(2) = 22$

$$\Rightarrow f(1)\ f(2) < 0$$

Mặt khác

$$f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \quad \forall x$$

f hàm đơn điệu tăng nên pt có duy nhất nghiệm

Vậy khoảng cách ly nghiệm là (1,2)

Ví dụ :

Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

giải :

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-1	3	1	-1	3	+

Nhìn vào bảng ta thấy pt có nghiệm trong các khoảng (-2, -1) (0, 1) (1,2)

Vì pt bậc 3 có tối đa 3 nghiệm, nên các khoảng cách ly nghiệm là : (-2,-1) (0,1) (1,2)

Bài tập :

1. Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$$

2. Tìm các khoảng cách ly nghiệm của pt

$$f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x + 1$$

Giải

1. $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2$

$f'(x) = e^x - 2x + 3$

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-	-	-	+	+	+

Nhận xét : $f'(x) > 0, \forall x \in [0,1]$.

Vậy khoảng cách ly nghiêm (0,1)

2. $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = \cos x - x\sin x - 4x + 3$

Ta lập bảng giá trị tại các điểm đặc biệt

x		-2	-1	0	1	2	
f(x)	-	-	-	+	+	-	-

Nhận xét :

$f'(x) < 0 \ \forall x \in [1,2]$,

$f'(x) > 0 \ \forall x \in [-1,0]$

Vây các khoảng cách ly nghiệm : (-1. 0), (1,2)

2. Cách giải gần đúng pt f(x) = 0

- B1: tìm tất cả các khoảng cách ly nghiệm

- B2: trong từng khoảng cách ly nghiệm, tìm nghiệm gần đúng của phương trình

3. Công thức sai số tổng quát :

Định lý :

Giả sử f(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b)
Nếu x* , x là nghiệm gần đúng và nghiệm chính xác của phương trình và

$$|f'(x)| \geq m > 0, \forall x \in (a,b)$$

thì sai số được đánh giá theo công thức :

$$\boxed{|x^* - x| \leq |f(x^*)| / m}$$

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$$

trên khoảng [-2, -1]

Tính sai số nếu chọn nghiệm $x^* = -1.37$

Giải

$$f'(x) = 3x^2 - 10x$$

Ta có $|f'(x)| = |x|\,|3x-10| = -x(10-3x),\ \forall x \in [-2,-1]$

Vậy $|f'(x)| \geq 13 = m,\ \forall x \in [-2,-1]$

Sai số

$$|x^* - x| \leq |f(x^*)|/m \approx 0.0034$$

Ghi nhớ : sai số luôn làm tròn lên

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = 5x + \sqrt[7]{x} - 24 = 0$$

trên khoảng [4,5]

Tính sai số nếu chọn nghiệm x* = 4.9

Giải

$$f'(x) = 5 + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

=> $$|f'(x)| \geq 5 + \frac{1}{7\sqrt[7]{5^6}} = m, \ \forall x \in [4,5]$$

Sai số

$$|x^* - x| \leq |f(x^*)|/m \approx 0.3485$$

4. Các phương pháp giải gần đúng

- Phương pháp chia đôi
- Phương pháp lặp đơn
- Phương pháp lặp Newton

II. Phương Pháp Chia Đôi

Xét phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm chính xác x trong khoảng cách ly nghiệm $[a,b]$ và $f(a)f(b) < 0$.

1. Đặt $a_o = a$, $b_o = b$

Chọn x_o là điểm giữa của $[a,b]$

Ta có $x_o = (a_0+b_0) / 2$, $d_0=b_o-a_o=b-a$

Nếu $f(x_o) = 0$ thì x_o là nghiệm $\rightarrow$ xong

2. Nếu

- $f(a_o)f(x_o) < 0$: đặt $a_1 = a_o$, $b_1 = x_o$
- $f(x_o)f(b_o) < 0$: đặt $a_1 = x_o$, $b_1 = b_o$

Ta thu được $[a_1, b_1] \subseteq [a_o, b_o]$

$$x_1 = (a_1+b_1) / 2,\ d_1 = b_1-a_1= (b-a)/2$$

3. Tiếp tục quá trình chia đôi như vậy đến n lần ta được

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}],\ d_n = b_n-a_n= (b-a)/2^n$$

$$x_n = (a_n+b_n) / 2,\ a_n \le x_n \le b_n,\ a_n \le x \le b_n$$

$$f(a_n)f(b_n) < 0$$

Ta có

$\{a_n\}$ dãy tăng và bị chặn trên (<=b)

$\{b_n\}$ dãy giãm và bì chặn dưới (>=a)

nên chúng hội tụ

Vì $b_n - a_n = (b-a)/2^n$, nên $\lim a_n = \lim b_n$

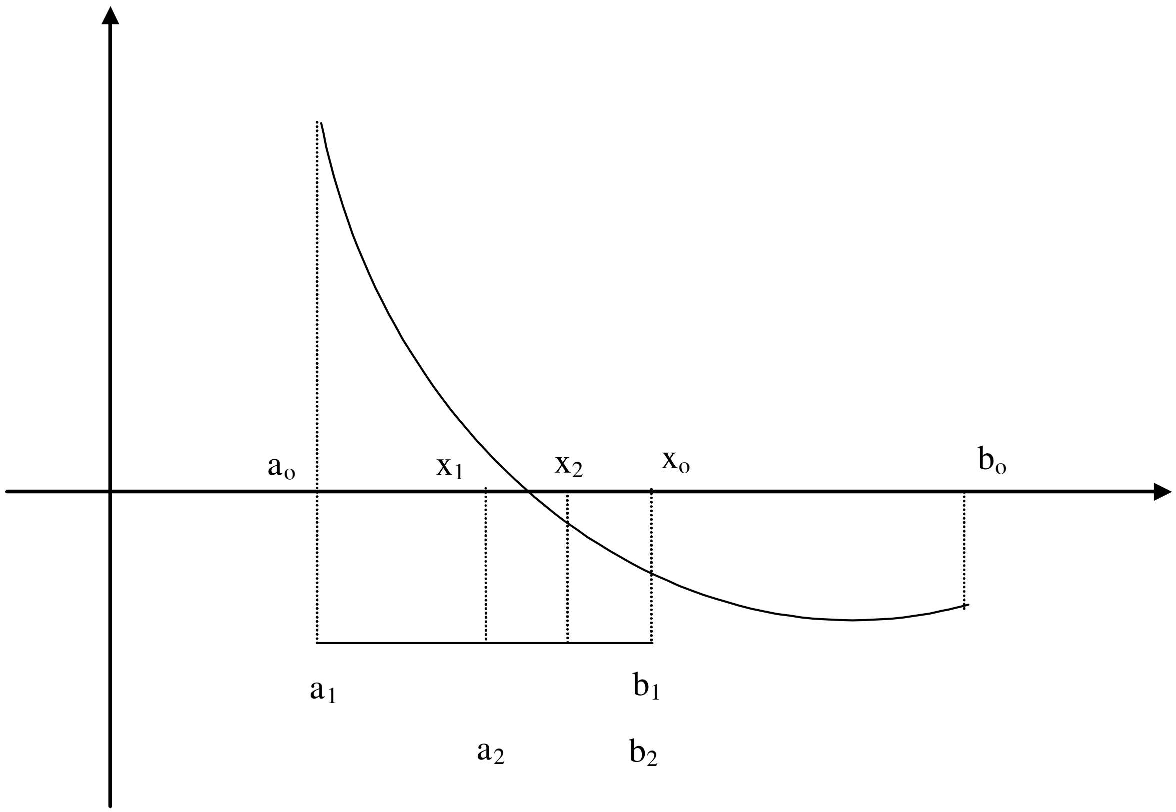
Suy ra $\lim x_n = x$

Vậy x_n là nghiệm gần đúng của pt

Công thức sai số

$$|x_n - x| \le (b-a) / 2^{n+1}$$

Ý nghĩa hình học



Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = 5x^3 - \cos 3x = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [0,1] với sai số 0.1

Giải

Ta lập bảng

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	Δ_n
0	0	-	1	+			0.5
1							0.25
2							0.125
3							0.0625

Nghiệm gần đúng là $x = 0.4375$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = 2+\cos(e^x-2)-e^x = 0$$

trên khoảng [0.5,1.5] với sai số 0.04

Giải

Ta lập bảng

n	a_n $f(a_n)$	b_n $f(b_n)$	x_n $f(x_n)$	Δ_n
0	0.5 +	1.5 -		0.5
1				0.25
2				0.125
3				0.0625
4				0.03125

Nghiệm gần đúng là $x = 1.03125$

III. Phương Pháp Lặp Đơn

Xét phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm chính xác x trong khoảng cách ly nghiệm $[a,b]$ và $f(a)f(b) < 0$.

Ta chuyển pt $f(x) = 0$ về dạng

$$x = g(x)$$

Nghiệm của pt gọi là điểm bất động của hàm $g(x)$

Để tìm nghiệm gần đúng, ta chọn 1 giá trị ban đầu $x_o \in [a,b]$ tùy ý

Xây dựng dãy lặp theo công thức

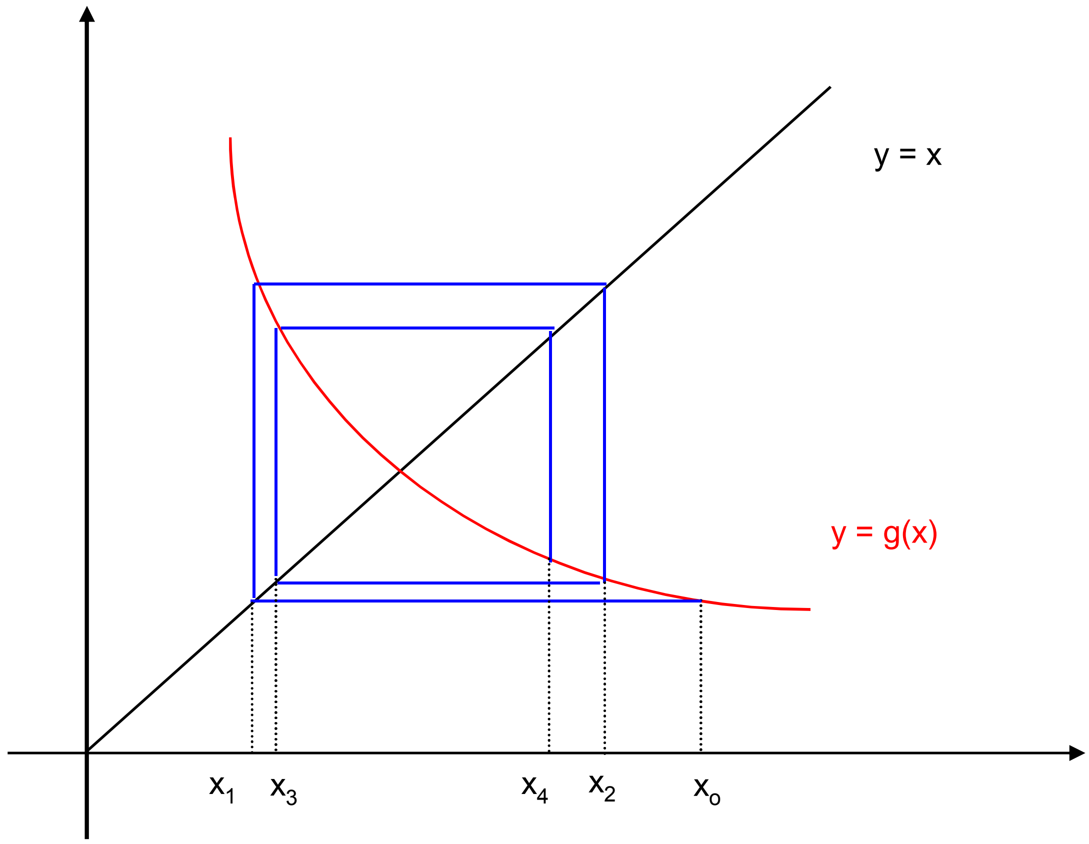
$$\boxed{x_n = g(x_{n-1}), \forall n = 1, 2, \ldots}$$

Bài toán của ta là khảo sát sự hội tụ của dãy $\{x_n\}$

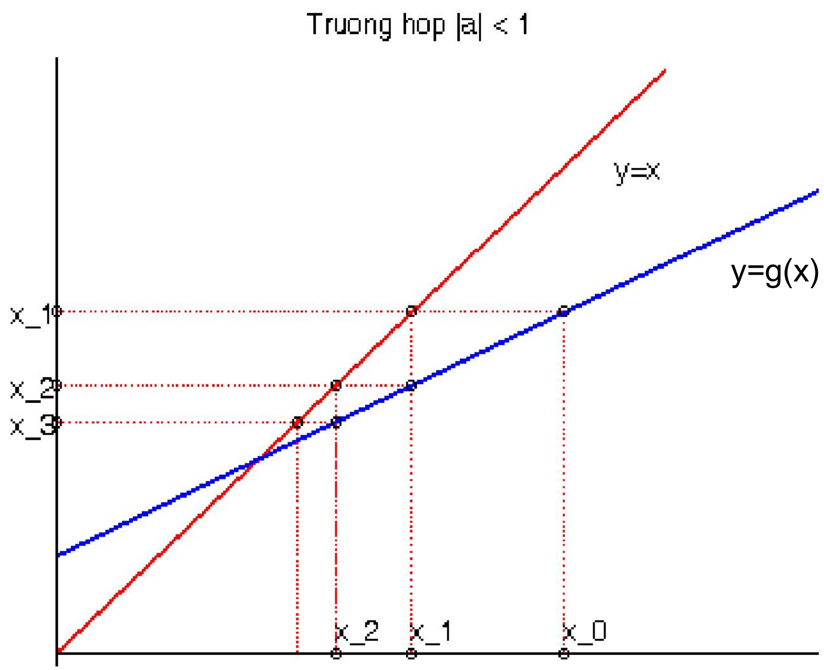
Tổng quát, dãy $\{x_n\}$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Nếu dãy $\{x_n\}$ hồi tụ thì nó sẽ hội tụ về nghiệm x của pt

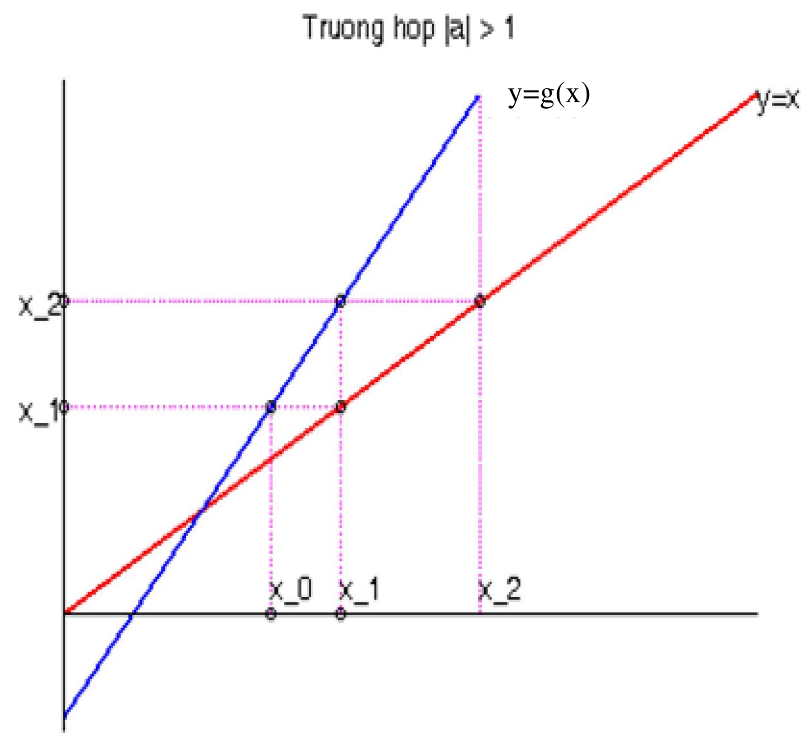
Ý nghĩa hình học



Ví dụ : Minh họa sự hội tụ của dãy lặp $x_{n+1} = g(x_n) = ax_n+b$



Dãy hội tụ



Dãy phân kỳ

Bây giờ ta tìm điều kiện để dãy $\{x_n\}$ hội tu

Ta có định nghĩa sau

Định Nghĩa : Hàm g(x) gọi là <u>hàm co</u> trên đoạn [a,b] nếu $\exists q : 0<q<1$ sao cho

$$| g(x) - g(y) | \leq q \, | x - y |, \forall x, y \in [a,b]$$

q gọi là hệ số co

Để kiểm tra hàm co, ta có định lý sau

Định lý : Nếu hàm g(x) liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b) và $\exists q : 0<q<1$ sao cho

$$| g'(x) | \leq q, \forall x \in [a,b]$$

Thì g(x) là hàm co với hệ số co q

Ví dụ : Xét tính chất co của hàm

$$g(x) = \sqrt[3]{10-x}$$

trên khoảng [0,1]

Giải

Hiển nhiên g(x) khả vi trên [0,1]

Ta có

$$|g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(10-x)^2}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{81}} = q, \forall x \in [0,1]$$

$$q \approx 0.0771 < 1$$

Nên g(x) là hàm co

Ví dụ : Xét tính chất co của hàm

$$g(x) = (x^2 - e^x + 2)/3$$

trên khoảng [0,1]

Giải

Hiển nhiên g(x) khả vi trên [0,1]

$$g'(x) = (2x - e^x)/3$$

$$g''(x) = (2 - e^x)/3 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Ta có $g'(0) = -0.33$, $g'(1) = -0.24$

$$g'(\ln 2) = -0.2046$$

$$\Rightarrow \quad |g'(x)| \le 0.33 = q < 1, \ \forall x \in [0,1]$$

Nên g(x) là hàm co

Định lý (nguyên lý ánh xạ co) :

Giả sử g(x) là hàm co trên [a,b] với hệ số co q, đồng thời g(x) $\in$ [a,b], $\forall x \in$ [a,b]

Khi ấy với mọi giá trị x_o ban đầu $\in$ [a,b] tùy ý, dãy lặp $\{x_n\}$ hội tụ về nghiệm x của pt

Ta có công thức đánh giá sai số

(1) $$|x_n - x| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$ tiền nghiệm

(2) $$|x_n - x| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$ hậu nghiệm

Nhận xét :Công thức (2) sai số chính xác hơn công thức (1)

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5 = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [3,4]

Giả sử chọn giá trị ban đầu $x_o = 3.5$

Tính gần đúng nghiệm x_4 và sai số Δ_4

Giải

Ta chuyển pt về dạng $x = g(x)$

Có nhiều cách chuyển :

Cách 1: $$x = \frac{x^2}{3} - \frac{5}{x} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{2x}{3} + \frac{5}{x^2}$$ Không phải hàm co

Cách 2: $x = 3 + \frac{5}{x^2} = g(x)$

$$g'(x) = -\frac{10}{x^3} \Rightarrow |g'(x)| \le \frac{10}{27} = q, \forall x \in [3,4]$$

$q < 1$ nên g hàm co

Hiển nhiên g(x) $\in$ [3,4] nên pp lặp hội tụ

xây dựng dãy lặp

$$\begin{cases} x_0 = 3.5 \\ x_n = 3 + \dfrac{5}{x^2_{n-1}}, \forall n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Ta lập bảng

n	x_n
0	3.5
1	3.408163265
2	3.430456452
3	3.424879897
4	3.426264644

Sai số

$$\Delta_4 = \frac{q}{1-q} | x_4 - x_3 | \approx 0.00082$$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = x^3+x-1000=0$$

với sai số 10^{-8}

Giải

$f'(x) = 3x^2+1 > 0$, $f(9) = -262$, $f(10) = 10$

Vây khoảng cách ly nghiêm [9,10]

Ta chuyển pt về dạng $x = g(x)$

Có nhiều cách chuyển :

Cách 1: $x = 1000 - x^3 = g(x)$ không phải hàm co

Cách 2: $x = \sqrt[3]{1000 - x} = g(x)$

Hiển nhiên g(x) khả vi trên [9,10]

$$|g'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1000-x)^2}} \le \frac{1}{3\sqrt[3]{990^2}} = q, \forall x \in [9,10]$$

$q \approx 0.0034 < 1$, nên g(x) là hàm co

Dễ dàng kiểm tra g(x) $\in[9,10]$, $\forall$x $\in$ [9,10]

$$(9 \le \sqrt[3]{1000-x} \le 10 \Leftrightarrow 0 \le x \le 271)$$

Theo nguyên lý ánh xạ co thì pp lặp hội tu

Chọn $x_o = 10$, xây dựng dãy lặp theo công thức

$$x_n = \sqrt[3]{1000 - x_{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, 3, ..$$

Sai số (dùng công thức (2) hậu nghiệm)

$$|x_n - x| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$$

Ta lập bảng

n	x_n	Δ_n
0	10	
1		
2		
3		

Nghiệm gần đúng x* = 9.966666789

Ví dụ : Xét phương trình

$$f(x) = x - \cos x = 0$$

trên khoảng cách ly nghiệm [0,1]

Giả sử chọn giá trị ban đầu $x_o = 1$. Xác định số lần lặp n khi xấp xỉ nghiệm pt với sai số 10^{-8}

(dùng công thức tiền nghiệm)

Giải

a. Ta chuyển về pt

$$x = \cos x = g(x)$$

g(x) là hàm co với hệ số co $q = \sin 1 < 1$

Mặt khác $g(x) = \cos x \in [0,1]$ nên pp lặp hội tụ xây dựng dãy lặp

$x_o = 1$

$x_n = \cos x_{n-1}$

Xác định số lần lặp bằng công thức tiền nghiệm

$$|x_n - x| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \leq 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \log\left(\frac{(1-q)10^{-8}}{|x_1 - x_0|}\right) / \log q = 112.8904$$

Vậy số lần lặp n = 113

Nhận xét :

Tốc độ hội tụ của pp lặp đơn phụ thuộc vào giá trị của hệ số co q

- q càng nhỏ (gần với 0) thì pp lặp hội tụ càng nhanh
- q càng lớn (gần với 1) thì pp lặp hội tụ càng chậm

IV. Phương Pháp Lặp Newton

Một phương pháp lặp khác là pp lặp Newton, nếu hội tụ sẽ cho tốc độ hội tụ nhanh hơn

Giả sử hàm f khả vi trên khoảng cách ly nghiệm [a,b] với $f(a)f(b) < 0$ và $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$

Phương trình $f(x) = 0$ tương đương với pt

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = g(x)$$

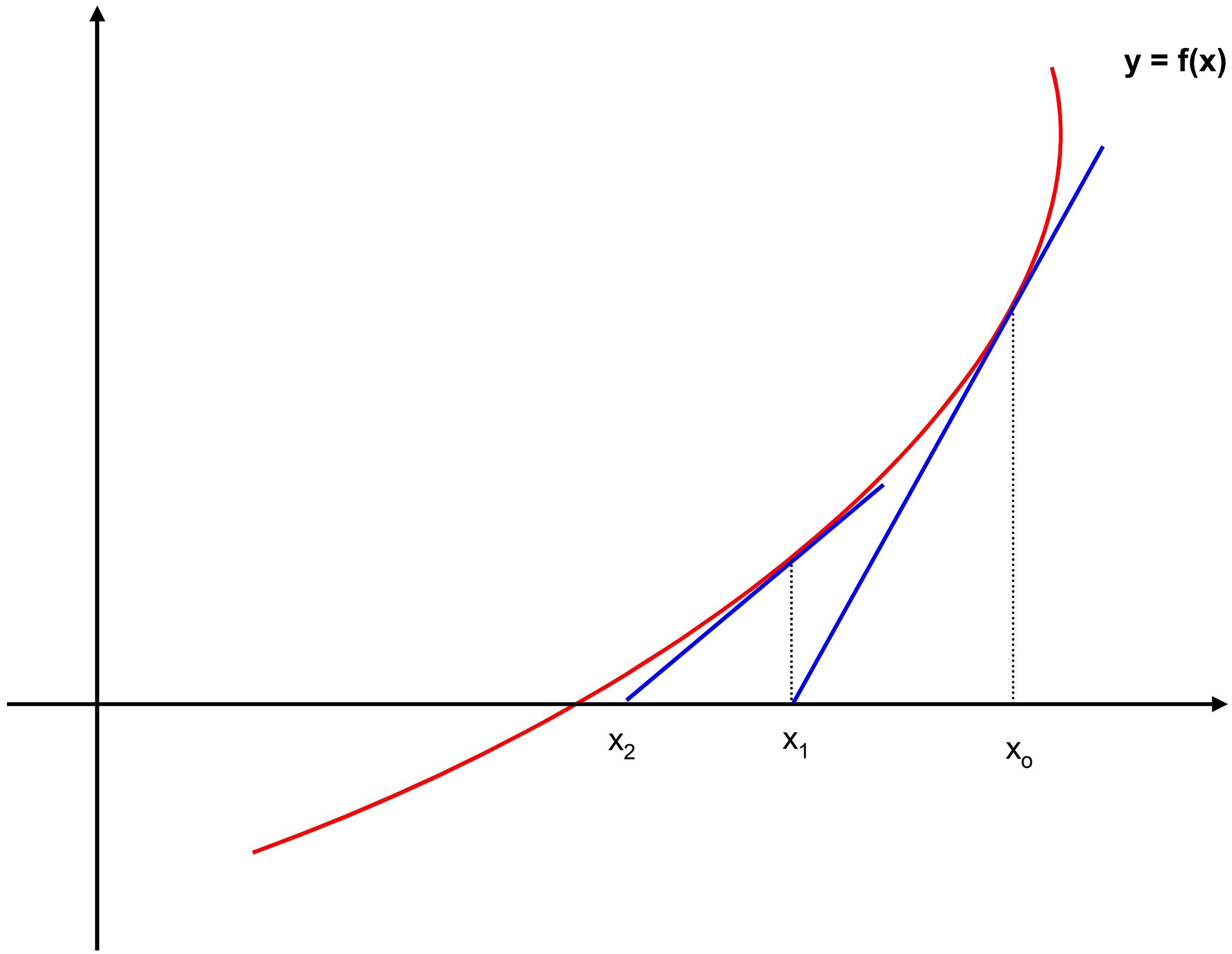
Để tìm nghiệm gần đúng ta chọn 1 giá trị ban đầu $x_o \in [a,b]$ tùy ý. Xây dựng dãy lặp $\{x_n\}$ theo công thức

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Công thức này gọi là công thức lặp Newton

Tổng quát, dãy $\{x_n\}$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Ý nghĩa hình học



Định lý :

Giả sử hàm f(x) có đạo hàm đến cấp 2 liên tục và các đạo hàm f'(x) và f''(x) không đổi dấu trên đoạn [a,b].

Khi ấy nếu chọn giá trị ban đầu x_o thỏa điều kiện Fourier

$$\boxed{f'(x_o)f''(x_o) > 0}$$

Thì dãy lặp $\{x_n\}$ xác định theo công thức Newton sẽ hội tụ về nghiệm x của pt

Chú ý :

- Điều kiện Fourier chỉ là điều kiện đủ không phải là điều kiện cần

- Từ điều kiện Fourier ta đưa ra qui tắc chọn giá trị ban đầu x_o như sau :

nếu đạo hàm cấp 1 và 2 cùng dấu, chọn $x_o = b$. Ngược lại trái dấu chọn $x_o = a$

- Điều kiện Fourier $f(x_o)f''(x_o)$ có thể = 0 tại các điểm biên

- Trong pp Newton, đạo hàm f'(x) phải $\neq 0$. Nếu $\exists$ $c \in [a,b]$: $f'(c) = 0$ thì ta phải thu hẹp khoảng cách ly nghiệm để loại bỏ điểm c.

- Để đánh giá sai số của pp Newton ta dùng công thức sai số tổng quát

$$|x^* - x| \leq |f(x^*)| / m$$

$$m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của pt

$$f(x) = x - \cos x = 0$$

Trên khoảng cách ly nghiệm [0,1] với sai số 10^{-8}

Giải

1.Kiểm tra điều kiện hội tu

$f(x) = x - \cos x$ có đạo hàm cấp 1 và 2 liên tục trên [0,1]

$f'(x) = 1+\sin x > 0, \forall x \in [0,1]$

$f''(x) = \cos x > 0$

$f'(x)$ và $f''(x)$ cùng dấu, chọn $x_o = 1$ ta có pp lặp Newton hội tụ

2. Xây dựng dãy lặp Newton

$$x_0 = 1$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - \cos x_{n-1}}{1 + \sin x_{n-1}} \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Công thức sai số

$$m = \min_{0 \le X \le 1} |f'(x)| = 1$$

$$|x_n - x| \le |f(x_n)|/m = |x_n - \cos x_n|$$

n	x_n	Δ_n
0	1	
1		
2		
3		

Nghiệm gần đúng x = 0.739085133

Ví dụ : Cho phương trình

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

Trên khoảng cách ly nghiệm [0,1]. Dùng pp Newton tính nghiệm x_3 và đánh giá sai số Δ_3 theo công thức sai số tổng quát

Giải

1.Kiểm tra điều kiện hội tu

Ta thấy $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ tại $x = 1$, do đó ta chia đôi để thu hẹp khoảng cách ly nghiệm.

Vì $f(0) = 1$, $f(0.5) = -0.375$

Thu hẹp khoảng cách ly nghiệm [0, 0.5]

f(x) có đạo hàm cấp 1 và 2 liên tục trên [0, 0.5]

$f'(x) = 3x^2-3 < 0$

$f''(x) = 6x \geq 0, \forall x \in [0, 0.5]$

f'(x) và f''(x) trái dấu, nên chọn $x_o = 0$ thì pp lặp Newton hội tụ

2. Xây dựng dãy lặp Newton

$$x_0 = 0$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - 3x_{n-1} + 1}{3x_{n-1}^2 - 3}$$

Công thức sai số

$$m = \min_{0 \le X \le 0.5} |f'(x)| = 2.25$$

$$|x_n - x| \le |f(x_n)|/m = |x_n^3 - 3x_n + 1|/2.25$$

n	x_n	Δ_n
0	0	
1		
2		
3		

Nghiệm gần đúng x = 0.347296353

Sai số 0.2545×10^{-8}

V. Giải gần đúng hệ pt phi tuyến bằng pp Newton Raphson

Hệ phương trình phi tuyến

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Trong đó $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ là các hàm liên tục và có đạo hàm riêng theo các biến x_i liên tục trong lân cận của nghiệm

Phương trình tương đương

$$f(x) = 0$$

Với $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Chọn giá trị ban đầu $x^{(0)}$ tùy ý thuộc lân cận của nghiệm. Ký hiệu $x^{(k)}$ là bộ nghiệm gần đúng ở bước thứ k

Công thức Newton

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - f(x^{(k-1)})/f'(x^{(k-1)}), \forall k = 1, 2 ...$$

Ta đưa về giải hệ phương trình tuyến tính

Ah = b

với b = $-f(x^{(k)})$

A là ma trân Jacobi

$$A = f'(x) = \begin{vmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \dots & \partial f_2/\partial x_n \\ \dots & & & \\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \dots & \partial f_n/\partial x_n \end{vmatrix}$$

Nghiệm gần đúng : $x^{(k+1)} = x^{(k)} + h$

Xét trường hợp hệ gồm 2 phương trình với 2 ẩn

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

Với F(x,y), G(x,y) là các hàm liên tục và có đạo hàm riêng theo các biến x, y liên tục trong lân cận của nghiệm

Chọn (x_o, y_o) tùy ý thuộc lc của nghiệm, công thức Newton gồm 2 dãy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - \dfrac{J_y(x_{n-1}, y_{n-1})}{J(x_{n-1}, y_{n-1})} \\ y_n = y_{n-1} - \dfrac{J_x(x_{n-1}, y_{n-1})}{J(x_{n-1}, y_{n-1})} \end{cases}$$

Trong đó $J = \begin{vmatrix} F_x^{'} & F_y^{'} \\ G_x^{'} & G_y^{'} \end{vmatrix} \neq 0, \forall (x, y)\, trong\, lc\, cua\, nghiem$

$$J_x = \begin{vmatrix} F_x^{'} & F \\ G_x^{'} & G \end{vmatrix} \qquad J_y = \begin{vmatrix} F & F_y^{'} \\ G & G_y^{'} \end{vmatrix}$$

Nếu dãy (x_n,y_n) hội tụ thì nó sẽ hội tụ về nghiệm (x,y) của pt

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng với n = 1 của hệ pt

$$\begin{cases} F(x,y) = x + 3\ln x - y^2 \\ G(x,y) = 2x^2 - xy - 5x + 1 \end{cases}$$

Nếu chọn $x_o = 1.5$, $y_o = -1.5$

Giải

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4664 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{3}{x} \\ 4x - y - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F'_y \\ G'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} = -12 \quad J_x = \begin{vmatrix} F'_x & F \\ G'_x & G \end{vmatrix} = -0.416 \quad J_y = \begin{vmatrix} F & F'_y \\ G & G'_y \end{vmatrix} = -1.4496$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{J_y}{J} = 1.3792 \\ y_1 = y_0 - \dfrac{J_x}{J} = -1.5347 \end{cases}$$

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng với n = 1 của hệ pt

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2 + xy - 10 \\ G(x,y) = y + 3xy^2 - 57 \end{cases}$$

Nếu chọn $x_o = 1.5$, $y_o = 3.5$

Giải

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 1.625 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F'_x \\ G'_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 36.75 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F'_y \\ G'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1+6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 32.5 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} = 156.125 \quad J_x = \begin{vmatrix} F'_x & F \\ G'_x & G \end{vmatrix} = 102.4375 \quad J_y = \begin{vmatrix} F & F'_y \\ G & G'_y \end{vmatrix} = -83.6875$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \dfrac{J_y}{J} = 2.0360 \\ y_1 = y_0 - \dfrac{J_x}{J} = 2.8439 \end{cases}$$